

纤维丛和Hopf纤维化^{*†}

高挺然[‡]

切丛是微分流形理论中非常基本的概念。设 M 为一个 n 维光滑流形， \mathcal{F} 是其图册。记 TM_x 为 M 上 x 点处的切空间，则可以考虑

$$TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$$

并在其上附加一个由 \mathcal{F} 诱导得到的光滑结构，从而将其看成 $2n$ 维流形。 TM 上还有一个自然投影

$$\pi: TM \longrightarrow M$$

$$\xi \longmapsto x \quad \xi \in TM_x, x \in M$$

任取 \mathcal{F} 的一个图卡 (U, φ) ， U 为开集。可以想见，由于每个点 x 上的切空间都是同构的，应有 $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} TM_x \cong U \times TM_{x_0}$ ，其中 $x_0 \in U$ 是 U 中任意一个固定的点。因此，局部地看， TM 就像是一个乘积空间。

纤维丛的概念是上述切丛概念的推广。借助于纤维丛，我们可以更好地理解Hopf在1931年作出的一个非常精巧的观察 [1]，现在一般称之为Hopf纤维化(Hopf fibration)。它在 $\pi_3(S^2)$ 的计算中起到重要的作用 [2] [5]，而且具有令人印象深刻的几何直观 [4]。更令人瞩目的是，它在物理学的许多地方都有着令人意想不到的应用 [8]。

这则笔记首先介绍纤维丛的概念，由此引出Hopf纤维化的构造，最后简单提及Hopf纤维化的几个应用。其中将仅讨论初等的内容，避免使用代数拓扑的工具。对相关及更深入的代数拓扑背景感兴趣的读者将会发现 [5]的价值。

1 纤维丛

1. 启发性的考虑和例子

^{*}根据2009年4月29日学术沙龙报告整理

[†]感谢毛天一为插图付出的辛勤劳动

[‡]基数 61

暂时先不考虑在其上装备坐标系统，如果我们希望推广切丛的构造，那么一个纤维丛的几何图象至少应该包含哪些因素？实践表明，我们至少可以要求一个“纤维丛” \mathcal{B} 含有以下成分：

- (i) 一个拓扑空间 B ，起到 TM 的作用，称之为**丛空间(bundle space)**或**丛(bundle)**；
- (ii) 一个拓扑空间 X ，起到 M 的作用，称之为**底空间(base space)**；
- (iii) 一个连续映射（在适当的拓扑下） $p: B \rightarrow X$ ，且映满 X ，称之为**投影(projection)**，就像切丛上的自然映射 π ；
- (iv) 一个“模板” Y ，称之为**纤维(fibre)**；并记 $Y_x := p^{-1}(x), \forall x \in X$ ，称之为 x 上的**纤维(fibre over the point x of X)**。就像对任意的 $x \in M$ ， TM_x 都同构（装备了适当的拓扑以后甚至可以是同胚）那样，对任意的 $x \in X$ ，要求 Y_x 同胚于 Y 。对每个固定的 $x \in X$ ，从 Y_x 到 Y 的同胚映射不必唯一，但要求它们至多只相差某个群 G 中的一个元素，这里群 G 是作用在 Y 上的一个从 Y 到 Y 的变换群，且 G 与具体的 x 的选择无关。我们称群 G 为此纤维丛的**丛结构群或丛群(group of the bundle)**；
- (v) $\forall x \in X$ ，存在 x 的邻域 V 以及同胚 $\phi: V \times Y \rightarrow p^{-1}(V)$ 且满足

$$p\phi(x', y) = x', \quad \forall x' \in V, y \in Y.$$

上面的(i)-(v)都是通过直观类比得到基本要求。其中第五条要求体现出我们强烈地希望 B 至少在局部上如同乘积空间一样易于考察。

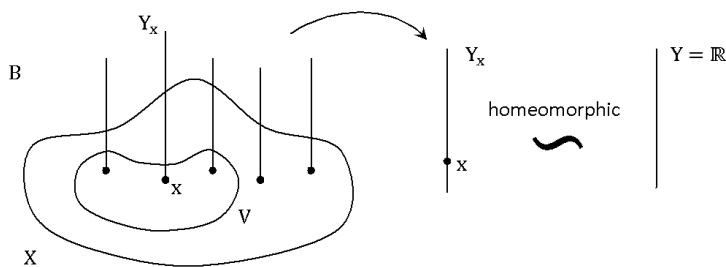


图 1: 取 $Y = \mathbb{R}$ 。在线丛的情形， B 就像是一个带有头发的皮球。

例 1.1 (乘积丛) X, Y 为两个拓扑空间， $B = X \times Y$ ， $p(x, y) = x$ ， $Y_x = \{x\} \times Y$ 。 Y_x 与 Y 之间的同胚映射由 $(x, y) \mapsto y$ 给出。为满足(v)，可取 $V = X$ ， ϕ 为从 $V \times Y$ 到 $p^{-1}(V) = V \times Y$ 的恒等映射。

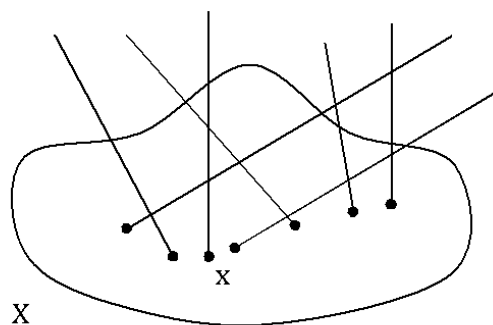
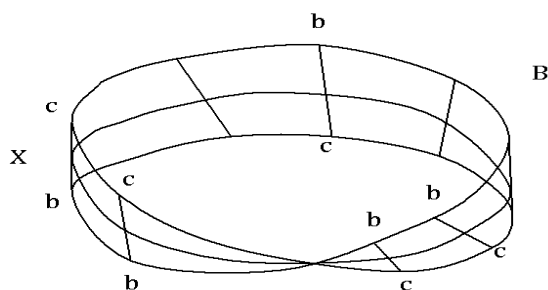
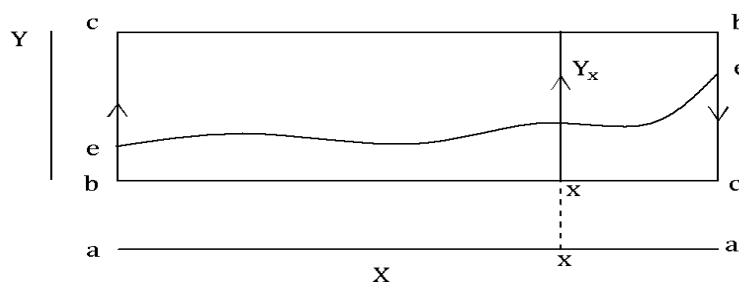


图 2: 若没有第五条要求, B 可能非常混乱, 并非如我们所愿。

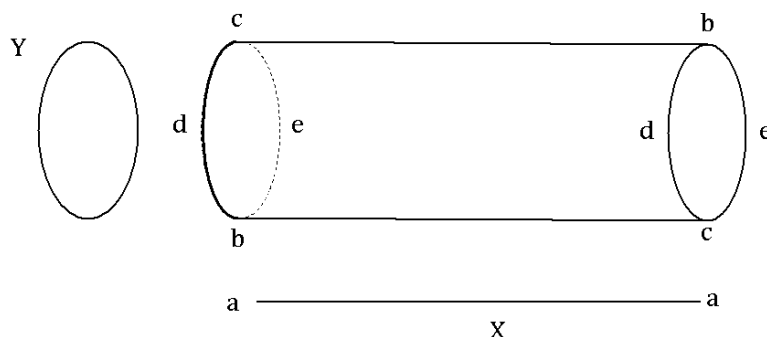
例 1.2 (Möbius带) 取底空间 X 为一条线段 L 粘合其两端而得到的圆周。纤维 Y 取为一条线段。 B 则由 $L \times Y$ 将两端的线段反向粘合得到。



投影 $p: B \rightarrow X$ 可以看成自然投影 $\pi: L \times Y \rightarrow L$ 在上述粘合下诱导的映射, 直观上将其理解为将Möbius带上各点投影至腰圆上是非常方便的。可取 $V = X$, 并将 ϕ 按与 p 类似的方式理解。从 B 上的一个**截面(cross section)**是指一个连续映射 $f: X \rightarrow B$ 满足 $pf(x) = x, \forall x \in X$ 。上图中连结矩形左端 e 点和矩形右端 e 点的曲线即是Möbius带上的一个截面的例子。注意在前述的粘合下, 两端的 e 点是

重合的。

例 1.3 (Klein瓶) 将例2中的纤维 Y 替换为一个圆周，并将 $L \times Y$ 两端的圆周绕一条直径 \overline{de} 反射后粘合得到 B 。这种粘合方式下， B 是一个Klein瓶。



例 1.4 (陪集空间) 取 B 为一个李群， X 为一个流形，而且 B 作为一个变换群传递地作用在 X 上。为定义投影 p ，任意固定 X 上一点 x_0 ，并定义 $p: B \rightarrow X$ 为 $b \mapsto b(x_0)$ 。纤维 Y 可取为 B 的固定 x_0 的子群；对每个 $x \in X$ ，由于 B 在 X 上的作用是传递的，故存在 $\beta_x \in B$ 使得 $\beta_x(x_0) = x$ 。而 Y_x 就是 B 中包含 β_x 的陪集 $\beta_x Y$ 。容易验证此 Y_x 的定义不依赖于 β_x 的特定选取。进一步注意到，每一个 $b \in Y_x$ 都给出了从 Y 到 Y_x 的同胚映射： $y \mapsto by, y \in Y$ ，而且任意两个这样的同胚映射 $b: Y \rightarrow Y_x, b': Y \rightarrow Y_x$ 之间只相差一个 Y 上的左乘 $b'b^{-1}$ 的平移。易见 $b'b^{-1} \in Y$ 。因此在这个例子里丛结构群就是 Y ，而且以左平移的方式作用在 Y 上。在这样的一个丛 B 上找一个截面即是构造一个 B 中的单传递连续变换群。

通过以上几个例子，我们可以感觉到纤维丛和乘积空间有很大的相似性，纤维丛的概念是乘积空间概念的推广。事实上，对空间 X, Y 以及映射 $f: X \rightarrow Y$ 的研究等同于对乘积空间 $X \times Y$ 、两个自然投影（ $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ 和 $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ ）以及映射 f 的图象的研究。纤维丛的概念将 $X \times Y$ 推广到丛空间 B ，将自然投影 π_2 替换为对每个固定的 $x \in X$ 指定的一族从 Y_x 到 Y 的同胚，其中任意两个同胚只相差一个作用在 Y 上的变换群 G 中的元素； $f: X \rightarrow Y$ 的图象则被推广到丛上的截面。

2. 坐标丛和纤维丛的精确定义

反思我们在前面做过的事情。在例4中，丛结构群 G 具有一个拓扑结构！这是我们非常希望任何一个“纤维丛”都能具有的。因此在上一节中我们并不急于给出纤维丛的精确定义，虽然所有的要素都已经齐备。本节首先借助坐标在丛群 G 上给出一个拓扑，再通过坐标丛之间引入一个等价关系来摆脱坐标，最终达到我们的目的。引入坐标也将给我们日后的工作提供很大的便利。

一个坐标丛 \mathcal{B} 是以下要素的集合：

- (1) 一个拓扑空间 B ，称为**丛空间(bundle space)**；
- (2) 一个拓扑空间 X ，称为**底空间(base space)**；
- (3) 一个连续满映射 $p: B \rightarrow X$ ，称为**投影(projection)**；
- (4) 一个拓扑空间 Y ，称为**纤维(fibre)**；
- (5) 一个 Y 上的有效(effective)拓扑变换群 G ，称为**丛结构群或丛群(group of the bundle)** (G 有效是指对任意的 $g \in G$ ， $gy = y, \forall y \in G \leftrightarrow g = e$)；
- (6) X 的一个开覆盖 $\{V_j\}_{j \in J}$ ，其中每一个 V_j 称为一个**坐标邻域(coordinate neighborhood)**；
- (7) 对任意的 $j \in J$ ，存在一个同胚 $\phi_j: V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$ ，称为一个**坐标函数(coordinate function)** (或一个**局部平凡化(local trivialization)**) 满足以下条件(8)-(10)；
- (8) $p\phi_j(x, y) = x, \quad \forall x \in V_j, y \in Y$ ；
- (9) 若定义映射 $\phi_{j,x}: Y \rightarrow p^{-1}(x)$ 为 $\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x, y)$ ，则对任意 $i, j \in J$ ，以及任意 $x \in V_i \cap V_j$ ，同胚 $\phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}: Y \rightarrow Y$ 与 G 中一个元素在 Y 上的作用相同 (在我们的定义下这个元素必定唯一，因为 G 是有效的)；
- (10) $\forall i, j \in J$ ，由 $g_{ji}(x) = \phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}$ 定义的映射 $g_{ji}: V_i \cap V_j \rightarrow G$ 是连续的。

不难发现，若没有(5)，(9)，(10)则这个纤维丛的概念和§1中的定义是一样的。条件(9)将群 G 与纤维丛的结构本质地联系起来，而条件(10)则刻画了群 G 的拓扑。

(10)中定义的映射 g_{ji} 称为纤维丛 \mathcal{B} 的坐标变换。这个定义的直接推论是，对任意的 $i, j, k \in J$

$$(11) \quad g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$$

特别地，若 $i = j = k$ ，则

$$(12) \quad g_{ii}(x) = \text{群}G\text{的单位元} \quad \forall x \in V_i$$

若在(11)中令 $i = k$, 并运用(12), 可得

$$(13) \quad g_{jk}(x) = [g_{kj}(x)]^{-1} \quad \forall x \in V_j \cap V_k$$

为方便计, 定义映射 $p_j: p^{-1}(V_j) \rightarrow Y$ 为 $p_j(b) = \phi_{j,x}^{-1}(b)$, $x = p(b)$, 则 p_j 满足恒等式

$$p_j \phi_j(x, y) = y, \quad \phi_j(p(b), p_j(b)) = b, \quad g_{ji}(p(b))p_i(b) = p_j(b) \quad \forall p(b) = x \in V_i \cap V_j$$

我们称两个坐标丛 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 在严格意义上等价, 若它们有相同的丛空间、底空间、投影、纤维、丛结构群, 而且它们的坐标函数 $\{\phi_j\}, \{\phi'_j\}$ 满足下述条件: $\forall x \in V_j \cap V'_k$, 映射 $\bar{g}_{kj}(x) = \phi'_{k,x} \phi_{j,x}^{-1}$ 与 G 中一个元素在 Y 上的作用相同, 而且由此得到的映射 $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \rightarrow G$ 是连续的; 简言之, 两组坐标函数之并仍是一组坐标函数。

利用 G 作为一个拓扑群的性质, 容易知道上面定义的“在严格意义上等价”确实是一个等价关系。利用这个等价关系, 我们可以给出如下的定义:

定义 1 一个纤维丛是指坐标丛在上述等价关系下的一个等价类。

实用中一类非常重要的纤维丛是**主丛(principal bundle)**, 其纤维 Y 即是从结构群 G 自身, 且 G 在 Y 上的作用是左平移。

作为本节的结束, 我们指出有如下重要的基本定理成立:

定理 1 (存在性定理) 若 G 是 Y 的一个有效拓扑变换群, $\{V_j\}_{j \in J}$ 和 $\{g_{ij}\}_{i,j \in J}$ 是 X 的一族坐标变换, 则存在一个纤维丛 \mathcal{B} , 以 X 为底空间, 以 Y 为纤维, 以 G 为丛结构群, 以 $\{g_{ij}\}_{i,j \in J}$ 为坐标变换。而且任何两个这样的纤维丛都是等价的。

证明略去, 可参阅文献 [3]§3.2。

2 Hopf纤维化

1. Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$

将球面 S^3 和 S^2 按如下方式参数化:

$$S^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$$

$$S^2 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1\}$$

Hopf [1]犀利地指出, S^3 是 S^2 上以 $U(1)$ 为纤维的一个丛。 $U(1)$ 即是 S^1 , 因此 S^3 即是“the fibering of spheres by spheres”的一个最简单的非平凡例子。(将 S^1 看作以 S^1 为底空间、以 S^0 为纤维的丛, 我们就看到了一个平凡例子。)

为 \mathbb{R}^4 引入复坐标 $z^0 = x^1 + ix^2, z^1 = x^3 + ix^4$, 则 S^3 可以写成

$$S^3 = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\}$$

定义Hopf映射 $h: S^3 \rightarrow S^2$ 如下:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= 2(x^1x^3 + x^2x^4) = z^0\bar{z}^1 + \bar{z}^0z^1 = 2\operatorname{Re} z^0\bar{z}^1 \\ \xi^2 &= 2(x^2x^3 - x^1x^4) = -i(z^0\bar{z}^1 - \bar{z}^0z^1) = 2\operatorname{Im} z^0\bar{z}^1 \\ \xi^3 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = |z^0|^2 - |z^1|^2\end{aligned}$$

容易验证 h 确实将 S^3 映成 S^2 :

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]^2 = 1$$

而且容易验证 h 是满射。这个映射 h 就是我们要找到的从丛空间 S^3 到底空间 S^2 的投影。

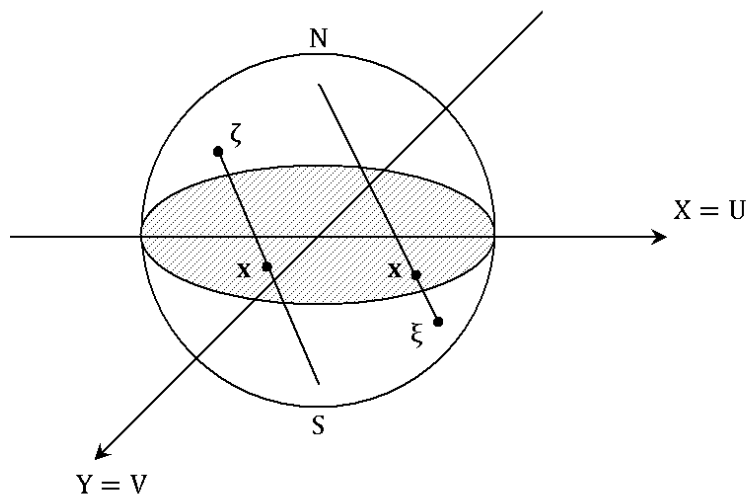
为构造坐标函数, 首先考虑 S^2 的球极投影。取 U_N 为 S^2 的上半球面与赤道的并, 取 U_S 为 S^2 的下半球面与赤道的并, 则 $U_N \cup U_S = S^2$, $U_N \cap U_S$ 为赤道。在赤道平面上装备复坐标, 则 $\forall \xi \in U_S$, 可以考虑北极与 ξ 的连线与赤道平面的交点(我们考虑这种球极投影, 因为我们希望所得到的投影坐标在单位圆内), 其复坐标为

$$Z = \frac{\xi^1 + i\xi^2}{1 - \xi^3} = \frac{z^0\bar{z}^1}{|z^1|^2} = \frac{z^0}{z^1}$$

注意到对任意 $\lambda \in U(1) = S^1$, Z 在旋转 $(z^0, z^1) \mapsto (\lambda z^0, \lambda z^1)$ 上不变, 而且 $\frac{z^0}{z^1}$ 在此球极投影下的原像都是形如 $(\lambda z^0, \lambda z^1)$ 的点, 因此纤维即是 S^1 ! 又由于 $|\lambda| = 1, (\lambda z^0, \lambda z^1) \in S^3$, 可见每条纤维都是 S^3 上的大圆。类似地, $\forall \zeta \in U_N$

$$Z = \frac{\zeta^1 - i\zeta^2}{1 - \zeta^3} = \frac{\bar{z}^0z^1}{|z^0|^2} = \frac{z^1}{z^0}$$

在赤道 $U_N \cap U_S$ 上, 坐标变换为 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 。



借助球极投影，下面可以给出 S^3 作为 S^2 上纤维丛的坐标函数：

$$\phi_S^{-1}: h^{-1}(U_S) \longrightarrow U_S \times S^1$$

$$(z^0, z^1) \longmapsto \left(\frac{z^0}{z^1}, \frac{z^1}{|z^1|} \right)$$

$$\phi_N^{-1}: h^{-1}(U_N) \longrightarrow U_N \times S^1$$

$$(z^0, z^1) \longmapsto \left(\frac{z^1}{z^0}, \frac{z^0}{|z^0|} \right)$$

赤道上 $\xi^3 = 0$, $|z^0| = |z^1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 对每个固定的 $\frac{z^0}{z^1} \in U_S \cap U_N$, ϕ_N 与 ϕ_S 相差一个坐标变换

$$t_{NS}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \frac{z^0}{z^1} \in U(1) = S^1$$

因此丛结构群即是 S^1 。我们可以验证以上构造满足坐标丛定义的所有要求，而且纤维和丛结构群都是 S^1 。这即是说 S^3 不但是 S^2 上以 S^1 为纤维的一个纤维丛，而且是一个主丛！

2. Hopf纤维化 $S^3 \rightarrow S^2$ 的几何图象

需要指出的是， S^3 作为 S^2 上的 S^1 丛这个事实远不是平凡的。换言之， S^3 并不同胚于 $S^2 \times S^1$ ，这只要考察它们各自的高阶同伦群就可以得知。这个非平凡性还体现在如下的有趣事实中：任意两条纤维 S^1 都不是两个不相干的圆周，它们在球极投影下是相互套在一起的(linked)！它们构成了最简单的一种link，

一般称之为Hopf link。为了说明这一点，我们需要考察将 S^3 映入 \mathbb{R}^3 的球极投影。

记其中一个投影函数为

$$s : S^3 \setminus (1, 0, 0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(w, x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right)$$

容易验证， s 将 S^3 中不经过 $(1, 0, 0, 0)$ 的圆周映为 \mathbb{R}^3 中的圆周，而将 S^3 中经过 $(1, 0, 0, 0)$ 的圆周映为 \mathbb{R}^3 中的直线。我们的观察分为两步：

- (1) 直接计算可以发现，纤维 $h^{-1}((0, 0, 1)) = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^0| = 1\}$ 被 s 映为 \mathbb{R}^3 中的 x 轴，而纤维 $h^{-1}((0, 0, -1)) = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^1| = 1\}$ 被 s 映为 \mathbb{R}^3 中的 yz 平面上的单位圆。

除此之外，对任意的点 $P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2, P \neq (0, 0, \pm 1)$ ，考虑 $s \circ h^{-1}(P)$ 与 yz 平面的交点，即要解方程组

$$\begin{cases} 2(x^1 x^3 + x^2 x^4) = p_1 \\ 2(x^2 x^3 - x^1 x^4) = -p_2 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = p_3 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1 \\ (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 x^3 = \frac{p_1}{2} \\ x^1 x^4 = \frac{p_2}{2} \\ (x^1)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \frac{1+p_3}{2} \end{cases}$$

一般地，只要 $(p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, \pm 1)$ ，交点 $(\frac{x^3}{1-x^1}, \frac{x^4}{1-x^1})$ 可以有而且仅有两个不同的位置，分别对应于取正值和负值的 x^1 。注意到

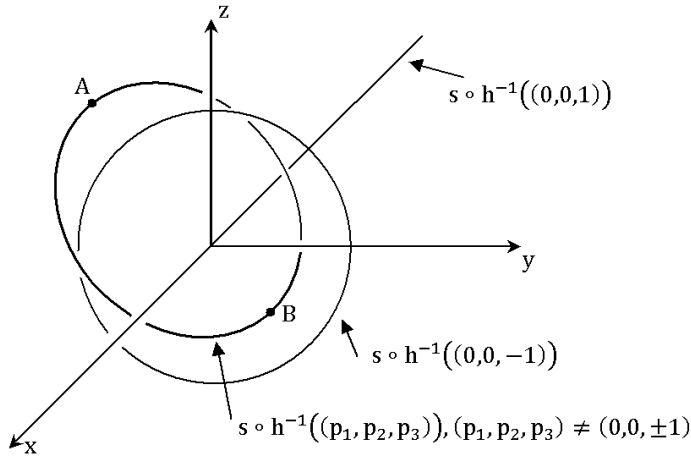
$$\left(\frac{x^3}{1-x^1} \right)^2 + \left(\frac{x^4}{1-x^1} \right)^2 = \frac{1-(x^1)^2}{(1-x^1)^2} = \frac{1+x^1}{1-x^1}, \quad x^1 = \pm \sqrt{\frac{1+p_3}{2}} \in (-1, 1)$$

故若取 $x^1 = \sqrt{\frac{1+p_3}{2}}, x^1 \in (0, 1), \frac{1+x^1}{1-x^1} > 1$ ，则交点在单位圆外；

若取 $x^1 = -\sqrt{\frac{1+p_3}{2}}, x^1 \in (-1, 0), \frac{1+x^1}{1-x^1} < 1$ ，则交点在单位圆内。

由此即可得知， $s \circ h^{-1}(P)$ 和 $s \circ h^{-1}((0, 0, -1))$ 是套着的，而且 x 轴必定不在 $s \circ h^{-1}(P)$ 所在的平面内，因为 S^2 中不同点上的纤维是彼此不交的。

- (2) 对任意两根纤维 $h^{-1}(P_1)$ 和 $h^{-1}(P_2)$ （假设 $(0, 0, \pm 1)$ 不在上述两根纤维的任何一根上），我们要说明它们在球极投影下的像是套着的。为此首先考虑一个 S^3 上的旋转 ρ ，它将 $h^{-1}(P_1)$ 转到 S^3 上一个新的位置，使得 $(0, 0, -1)$ 位

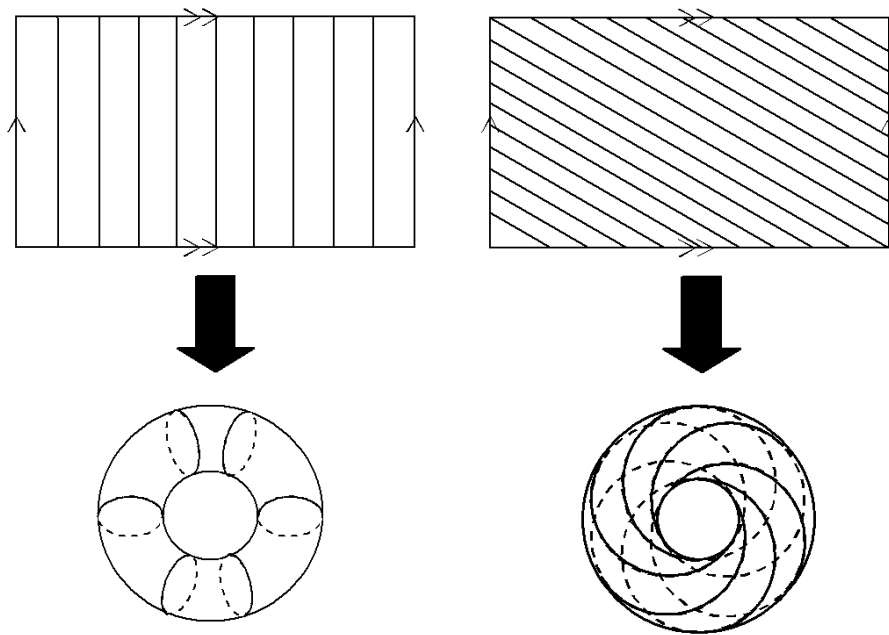


于 $\rho \circ h^{-1}(P_1)$ 上。接着考虑(1)中的球极投影，由(1)容易知道 $\rho \circ h^{-1}(P_1)$ 与 $\rho \circ h^{-1}(P_2)$ 在此球极投影下是套着的。但现在这两个圆环是 $s \circ h^{-1}(P_1)$ 和 $s \circ h^{-1}(P_2)$ 在映射 $s \circ \rho \circ s^{-1}$ 下的像，由于旋转 ρ 是同痕于恒等映射的， $s \circ \rho \circ s^{-1}$ 必然也是同痕于恒等映射的。由此可以断言， $s \circ h^{-1}(P_1)$ 和 $s \circ h^{-1}(P_2)$ 也是套着的，因为一个 Hopf link 对应的 Jones 多项式是 $\sqrt{t}(1+t^2)$ ，两个不套着的圆环对应的 Jones 多项式则是 $-(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t})$ ，而且我们知道 Jones 多项式具有同痕不变性(isotopic invariance) (参见 [6])。

统合(1)(2)，我们注意到，借助从 S^3 到 \mathbb{R}^3 的球极投影，我们将 \mathbb{R}^3 分解成了一条直线和许多圆环的并，而且非常不平凡地，其中任意两个圆环都是套着的，同时直线穿过所有圆环的内部。我们也可以将这种分解视为 \mathbb{R}^3 的一个“纤维化”(fibration)。

特别有趣的一个情形是，若我们考察 S^2 上的一个纬圆 C (不经过极点，落在某个球极投影 s 的定义域里)，容易发现 $h^{-1}(C)$ 同胚于 $S^1 \times S^1$ ，从而 $s \circ h^{-1}(C)$ 是 \mathbb{R}^3 的一个环面，它被一族圆环 $\{s \circ h^{-1}(P) \mid P \in C \subset S^2\}$ 纤维化，而且其中任意两个圆环都是套住的！这样的一族圆环历史上被称为 Villarceau circles，它是 S^1 以不平凡的方式纤维化 T^2 的著名例子。

作为一个重要的注记，在本节的最后我们指出，不但 S^3 上的任意两根纤维在球极投影下的像是套在一起的，他们本身在 S^3 上也是套在一起的。关于这一点，可以参阅 [5]§17, pp.227-239。(h 的 Hopf 不变量为 +1，即是说 $\forall P_1, P_2 \in S^2$,



(a) T^2 的 S^1 纤维化：平凡的方式

(b) T^2 的 S^1 纤维化：Villarceau circles

$h^{-1}(P_1)$ 和 $h^{-1}(P_2)$ 在 S^3 中是套在一起的。)

3. 其他Hopf映射

我们可以换一种方式来考虑Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ ，从而得到它的一些推广。
将 S^3 看作一维复球面：

$$S^3 \cong S^1_{\mathbb{C}} = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\}$$

将 S^2 看作一维复射影空间：

$$S^2 \cong \mathbb{C}P^1 = \{[(z^0, z^1)] \mid (z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2, [(z^0, z^1)] = \{\lambda(z^0, z^1) \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}\}$$

考虑如下映射：

$$\begin{aligned} h: S^1_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (z^0, z^1) &\longmapsto [(z^0, z^1)] \end{aligned}$$

在此映射下， $S^1_{\mathbb{C}}$ 上所有形如 $\lambda(z^0, z^1)$ ， $|\lambda| = 1$ 的点都被映为 $\mathbb{C}P^1$ 中相同的点，而且 $h^{-1}([(z^0, z^1)])$ 必定由所有形如 $\lambda(z^0, z^1)$ ， $|\lambda| = 1$ 的点构成。容易验证，这个映射 h 确实和之前定义的Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 相一致。

推广的基本想法是将数域 \mathbb{C} 换为其他代数。仔细检查Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 的构造，可以注意到我们并没有用到 \mathbb{C} 的全部性质，而仅要求这个代数满足：(1)是一个可除代数(division algebra)；(2)其上的范数是可乘的($\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$)。注意(2)可以保证这个代数是一个无零因子环。由于 \mathbb{C} 可看作是一个实二维可除代数，因此我们推广的方向就成为：寻找所有装备了可乘范数的实可除代数。注意这里的代数不但未必是交换的，甚至可以是非结合的。

1878年，Frobenius [9]证明了所有的结合实可除代数只能是实数 \mathbb{R} ，复数 \mathbb{C} 和四元数 \mathbb{H} ；1958年，Bott和Milnor [10]证明了所有的有限维实可除代数只能是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 和八元数 \mathbb{O} 。八元数代数 \mathbb{O} 又称为Cayley numbers，不但不是域、不交换，甚至不是结合的。若再要求范数可乘，则不可能有满足要求的无限维代数，Hurwitz定理 [11]指出 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 和 \mathbb{O} 就是我们所有可能的选择。这四种情形下相应的Hopf映射分别为：

$$\begin{aligned} \mathbb{R} : S^0 &\hookrightarrow S^1 \xrightarrow{h} S^1 \\ \mathbb{C} : S^1 &\hookrightarrow S^3 \xrightarrow{h} S^2 \\ \mathbb{H} : S^3 &\hookrightarrow S^7 \xrightarrow{h} S^4 \\ \mathbb{O} : S^7 &\hookrightarrow S^{15} \xrightarrow{h} S^8 \end{aligned}$$

这就是我们所可能拥有的所有Hopf纤维化。对 \mathbb{R}, \mathbb{C} 和 \mathbb{H} 的情形可以直接套用上面对Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 的等价描述，只需要选取不同的代数即可，而且得到的纤维丛都是主丛。 \mathbb{O} 的情形有一些小的困难，因为它是非结合的，故 \mathbb{O}^1 未必能定义好；而且 S^7 不是一个群，从而得到的纤维丛必不是主丛。但用另外的方式仍能看出Hopf映射 $S^{15} \rightarrow S^8$ 上的纤维丛结构，详细的讨论可参见 [3]§20, pp.105-110。

值得一提的是，上述四个代数在物理中都有广泛而深刻的应用。

3 Hopf纤维化的各种应用

可以想见，既然Hopf纤维化研究的是球面这样基本的几何对象的拓扑性质，它应能在许多场合下出现。

1. 力学中的两个例子 [13]

(1) 1-1共振(The One-to-one Resonance)

考虑两个谐振子的共振系统时，人们常常遇到如下形式的Hamilton函数：

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\lambda}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \text{高阶项}$$

若 $\lambda = 1$ ，则此Hamilton函数的二次型部分描述的即是被称为“1-1共振”的力学系统。考虑临界情形

$$H_0 = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)$$

等能量面 $H_0 \equiv \text{const}$ 即是 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 。引入复坐标 $z_1 = q_1 + ip_1, z_2 = q_2 + ip_2$ ，则 $H_0 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ 。易见 H_0 在 $SU(2)$ 的作用下是左不变的，相应的守恒量为

$$W_1 = 2(q_1q_2 + p_1p_2)$$

$$W_2 = 2(q_2p_1 - q_1p_2)$$

$$W_3 = q_1^2 + p_1^2 - q_2^2 - p_2^2$$

且它们满足 $4H_0^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2$ 。因此上述映射 $j: (q_1, p_1, q_2, p_2) \mapsto (W_1, W_2, W_3)$ 是一个从 S^3 到 S^2 的连续映射，不难发现这就是Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 。因此，在相空间中1-1共振系统的轨道 (q_1, p_1, q_2, p_2) 就是 S^3 上的大圆。（这个为人所熟知的经典例子在很多地方都被提及，例如 [7], pp.24）

(2) 刚体的运动

刚体的构形空间是 $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ 。若固定一个正交矩阵 A ，将沿固定在刚体上的坐标系的某条坐标轴的单位向量 \vec{k} 映到 $A\vec{k}$ ，则我们构造了一个从 $SO(3)$ 到 S^2 的投影（本质上是一个动量映射的限制，参阅 [13] §1.3, §1.10）。将此投影与从 $SU(2) \cong S^3$ 到 $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ 的商映射复合，我们将再次见到Hopf映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 。[13] §1.10中提供了大量相关介绍和历史注记。

2. 磁单极子(Magnetic Monopole)的势场 [14] [8]

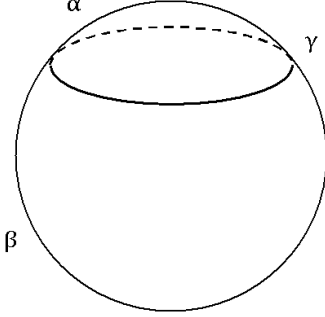
考虑一个强度为 $g \neq 0$ 的磁单极子。为描述一个在它所产生的磁场中运动的电子的波函数，我们需要找该磁场的一个矢量势 \vec{A} 。1931年，Dirac [15]描述了这样的一个势 \vec{A} ，但它不是光滑的，其奇点排列在某些线上。

一个这样的光滑的矢量势是不存在的，为此只需考虑以这个磁单极子为中心， R 为半径的一个球面，在其上取一条闭合曲线 γ ， γ 将球面分成两个区域 α 和 β 。

利用Stokes定理可以计算出通过球冠 α 和 β 的磁通量:

$$\Omega_\alpha = \oint_\gamma A_\mu dx^\mu$$

$$\Omega_\beta = \oint_\gamma A_\mu dx^\mu$$



因此穿过整个球面的总磁通量为 $\Omega_\alpha - \Omega_\beta = 0$, 与由Gauss定理给出的总磁通量应为 $4\pi g \neq 0$ 矛盾。

然而, 一个磁单极子激发的磁场应是没有奇点的, 因此 \vec{A} 的这些奇点仅仅是数学上而不是真实物理上的困难。克服这一困难的方法是用两张图卡覆盖上面所说的球面, 并分别在它们上面定义磁矢势, 就像我们经常流形上做的那样。记 R_a 为半径为 R 的球面挖去南极点的部分, R_b 为半径为 R 的球面挖去北极点的部分, 它们组成球面的一个开覆盖。在 R_a 上定义矢势 $(\vec{A})^a$:

$$(A_r)^a = (A_\theta)^a = 0, \quad (A_\phi)^a = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta)$$

在 R_b 上定义矢势 $(\vec{A})^b$:

$$(A_r)^b = (A_\theta)^b = 0, \quad (A_\phi)^b = \frac{-g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta)$$

它们在各自的定义域上都是没有奇点的。不难验证它们都给出磁单极子 g 激发的磁场, 故在 $R_a \cap R_b$ 上它们相差一个梯度项。直接的计算表明

$$(A_\mu)^a - (A_\mu)^b = \partial_\mu \alpha, \quad \alpha = 2g\phi \quad (\text{其中}\phi\text{是方位角})$$

于是磁单极子的磁场中电子的Schrödinger方程为

$$\left[\frac{1}{2m} (p - eA_a)^2 + V \right] \psi_a = E \psi_a \quad \text{in } R_a$$

$$\left[\frac{1}{2m} (p - eA_b)^2 + V \right] \psi_b = E \psi_b \quad \text{in } R_b$$

其中 ψ_a, ψ_b 就是电子分别在 R_a 和 R_b 中的波函数。由于两个方程中的矢量势相差一个梯度，由规范场的理论可知 ψ_a 和 ψ_b 相差一个相位因子的变换

$$\psi_a = S \psi_b, \quad S = e^{ie\alpha}$$

或写为

$$\psi_a = e^{2iq\phi} \psi_b, \quad q = eg$$

考虑球面上的赤道，它落在 $R_a \cap R_b$ 中，由 ψ_a 在 R_a 中的单值性以及 ψ_b 在 R_b 中的单值性可知，绕赤道一周后回到出发点的波函数 ψ_a, ψ_b 应和它们出发前相同，这就导出了著名的Dirac量子化条件

$$2q = 2eg = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

这里的波函数 ψ_a, ψ_b 已经不是通常意义上的 S^2 上的函数，而是 S^2 上的截面，它定义在 S^2 上的一个非平凡的纤维丛上。这是一个怎样的纤维丛呢？这就由上面的Dirac量子化条件中的整数 n 决定。整数 n （又称为**拓扑量子数(topological quantum number)**）是 R_a 和 R_b 两个图卡之间的坐标变换映射沿赤道的**环绕数(winding number)**，在相差一个同构的意义下唯一地刻画了 S^2 上的一个复线丛，或附加于其上单位向量的一个球丛（参阅 [5], pp.297-302）。特别地，当 $n = 1$ 时，我们得到的就是 S^2 上的一个 S^1 丛，也就是Hopf纤维化 $S^3 \rightarrow S^2$ 中给出的纤维丛结构。 $n = -1$ 的丛被称为anti-Hopf的。

3. 两态量子系统的Bloch球面(Bloch Sphere)表示 [16] [8]

一个两态量子系统可以用一个二维Hilbert空间 \mathbb{C}^2 描述，其上装备标准的Hermite内积。一个量子比特(qubit)可以写为

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

系统的态由密度矩阵（迹为1的Hermite正定 2×2 矩阵）给出，而系统的观测量则由Hermite矩阵给出。用矩阵 A 表示的观测量在密度矩阵为 ρ 的态上的期望由实数 $\text{Tr} A\rho$ 给出。当 ρ 的秩为1时，它被称为一个纯态(pure state)，可以用向量 $z \in \mathbb{C}^2$ 表示为 $\rho = \frac{zz^\dagger}{z^\dagger z}$ ，其中 $z^\dagger w = \langle z, w \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$ ；而观测量 A 在其上的期望为 $\frac{z^\dagger A z}{z^\dagger z}$ 。注意到相差一个复因子的向量 z 决定同一个纯态。

现在考虑以Pauli矩阵 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为观测量的期望，其中

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

将它们写成一个矩阵向量 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ，它在态 ρ 上的期望可以写为 $\vec{R} = \text{Tr} \rho \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^3$ 。容易验证这个关系可以反过来写成 $\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{R} \cdot \vec{\sigma})$ ，其中 ρ 的正定性蕴含 $\vec{R}^2 \leq 1$ ，且仅当 ρ 是纯态时等号成立。这即是说， $\vec{R}(z) := \frac{z^\dagger \vec{\sigma} z}{z^\dagger z}$ 满足 $\vec{R}^2(z) = 1$ ，亦即密度矩阵 ρ 可以用 \mathbb{R}^3 中单位闭球表示，而纯态都相应于 \mathbb{R}^3 中的单位向量。这个单位闭球面历史上称之为 Bloch sphere（这个单位闭球则相应地可以被称为 Bloch ball），因为 F. Bloch 曾用它解释了磁自旋共振现象。

具体地写出来，态集合 $e^{i\phi}|\psi\rangle (\phi \in [0, 2\pi))$ 被映到 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 中的一个点，其坐标为

$$\begin{aligned} X &= \langle \sigma_1 \rangle_\psi = 2 \operatorname{Re} \bar{\alpha} \beta \\ Y &= \langle \sigma_2 \rangle_\psi = 2 \operatorname{Im} \bar{\alpha} \beta \\ Z &= \langle \sigma_3 \rangle_\psi = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{aligned}$$

Bloch 球面坐标和纯态密度矩阵 $\rho_{|\psi\rangle}$ 的关系为

$$\rho_{|\psi\rangle} = \rho_{e^{i\phi}|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+Z & X-iY \\ X+iY & 1-Z \end{pmatrix}$$

对混合态 (mixed state) 的情形，密度矩阵与 Bloch sphere 内部的点一一对应。显然， (X, Y, Z) 就是前面给出的 Hopf 映射 $S^3 \rightarrow S^2$ 。

完全类似地，我们可以考虑一个 two-qubit Hilbert 空间，其中一个 2-量子比特纯态可以写为

$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

借助四元数代数 \mathbb{H} ，我们可以考虑一个类似的“Bloch 球面表示”，其中用到 Hopf 映射 $S^7 \rightarrow S^4$ 。而这里一个有趣的事实是： S^7 的 Hopf 纤维化对纠缠态 (entangled state) 是“敏感”的 (entanglement sensitive)，并且因此为 2-量子比特态提供了某种“分层” (“stratification”) (参阅 [16] 中的详细论述)。

4. 更多的应用例子

[8] 中提及了更多物理中应用 Hopf 纤维化的例子。

4 一点历史注记

Heinz Hopf 最早为了计算 $\pi_3(S^2)$ 而提出的 Hopf 纤维化 [1] 是拓扑学中的重要发现，也在李群理论的发展中起到了不容忽视的作用。[1] 和 [2] 无疑是早期同伦论发展的光辉成就。

P. A. M. Dirac对磁单极子的磁场所作的研究推广了传统波动力学的框架，具有重要意义。直到20世纪70年代，人们才意识到Dirac所描述的东西在数学上相当于纤维丛、截面和联络的语言 [17]。类似于数学上研究函数的Hilbert空间，人们发现需要研究截面的Hilbert空间 [18]。

“Dimensions”是一个非常著名的非商业数学系列科普短片，在各种视频网站上都可以容易地找到，其中使用大量直观的图象和动态视频演示了几何学的许多研究对象。它的第7、8两集深入地解释了纤维丛和Hopf纤维化的构造，基本涵盖了这则笔记的核心内容，观看之将给人非常大的启发。

参考文献

- [1] Hopf, H. *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.* Math. Ann. 104(1931), 637-665
- [2] Hopf, H. *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären neidrigerer Dimension.* Fund. Math. 25(1935), 427-440
- [3] Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Univ. Press, 1974
- [4] Lyons, D. *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration.* Mathematics Magazine. 76(2003), no.2, 87-98
- [5] Bott, R. and Tu, L. W. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, New York, 1982 (GTM82)
- [6] Lickorish, W. B. R. *An Introduction to Knot Theory.* Springer, New York, 1997 (GTM175)
- [7] Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* 2nd edition, Springer, New York, 1989 (GTM60)
- [8] Urbantke, H. K. *The Hopf Fibration—seven times in physics.* J. Geom. Physics. 46(2003), no.2, 125-160
- [9] Mishchenko, A. and Solovyov, Y. *Quaternions.* Quantum 11(2000), 4-7 and 18

- [10] Bott, R. and Milnor, J. *On the Parallelizability of the Spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. 64(1958), 87-89
- [11] Kantor, I. L. and Solodnikov, A. S. *Hypercomplex Numbers, an elementary introduction to algebras*. Springer-Verlag, New York, 1989
- [12] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Philadelphia, 1990
- [13] Marsden, J. and Ratiu, T. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1994
- [14] Yang, C. N. *Fibre Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole*. The Chern Symposium, Springer-Verlag, 1979, 247-254
- [15] Dirac, P. A. M. *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*. Proc. R. Soc. London. A133(1931), 60-72
- [16] Mosseri, R. and Dandoloff, R. *Geometry of Entangled States, Bloch Sphere and Hopf Fibrations*. J. Phys. A: Math. Gen. 34(2001), 10243-10252
- [17] Wu, T. T. and Yang, C. N. *Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields*. Phys. Rev. D12(1975), 3845-3857
- [18] Wu, T. T. and Yang, C. N. *Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics*. Nuclear Phys. B107(1976), 365.